2019-2020 EĞİTİM ÖĞRETİM YILI FEN-EDEB. FAK. MAT 101 ANALİZ I BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI

ADI-SOYADI:
NUMARASI:
İMZASI: 22.01.2020

Uyarılar:
- Sınav süresi 120 dakikadır.
- İlk 30 dakika sınav salonunu terk etmeyiniz.
- Sınav süresince mobil telefonlarınızı kapalı tutunuz.
- Ders notlarını içeren herhangi bir aracın sınav süresince kullanılması yasaktır.
- Sınavda 7 soru olup, her soru 15 puan değerindedir, toplam 105 puandır.
- Her soruyu altındaki boşluğa çözünüz.
- Cevaplamaya istediğiniz sorudan başlayabilirsiniz.
- Tam puan almak için yaptığınız işlemleri sınav kağıdında belirtmeniz gerekmektedir.
- Başarılar…

Prof. Dr. Birsen SAĞIR DUYAR, Prof. Dr. İlker ERYILMAZ

Soru No	Puan
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
Toplam	

1) a) (Doğru/Yanlış) Her Cauchy dizisi sınırlıdır D

b) (Doğru/Yanlış) $(x_n) = (\cos n)$ dizisi yakınsaktır Y

c) (Boşluğu doldurunuz) $\operatorname{sgn}(\cos 5) =$ 1 dir.

d) (Boşluğu doldurunuz) $f(x) = \dfrac{1}{x - [\![x]\!]}$ fonksiyonunun tanım kümesi $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ dir.

e) (Boşluğu doldurunuz) $\sin\left(\arctan \dfrac{4}{3}\right) =$ $4/5$ dir.

2) $\varnothing \neq A \subset \mathbb{R}$ alttan sınırlı bir küme ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun. $\lambda + A = \{\lambda + a : a \in A\}$ olmak üzere $\lambda + A$ kümesi alttan sınırlı olup $\inf(\lambda + A) = \lambda + \inf(A)$ olduğunu gösteriniz.

$A \subset \mathbb{R}$ alttan sınırlı ise $\forall x \in A$ için $x \geq K$ o.ş. $\exists K \in \mathbb{R}$ vardır. $\lambda + A$ kümesi için $\forall \lambda + a \in \lambda + A$ alındığında $\lambda + a \geq \lambda + K = k'$ olup $\lambda + A$ alttan sınırlıdır. O zaman $\inf(\lambda + A)$ vardır. $\lambda + K$ sayısı $\lambda + A$ kümesi için bir alt sınır olup $\inf(\lambda + A) \geq \lambda +$ ------- (1) yazılır.

İnfimum karakteristik özelliğinden $\forall \varepsilon > 0$ için $\inf(A) \leq x_\varepsilon < \inf A + \varepsilon$ o.ş. $\exists x_\varepsilon \in A$ vardır. Buradan $\lambda + \inf(A) \leq \lambda + x_\varepsilon < \lambda + \inf A + \varepsilon$ olup $\lambda + x_\varepsilon \in \lambda + A$ için (1) ile $\inf(\lambda + A) = \lambda + \inf(A)$ olur.

3) (a) $\dfrac{1}{x+1} \geq \dfrac{3}{x-2}$ eşitsizliğini sağlayan $x \in \mathbb{R}$ sayılarını bulunuz.

$$\frac{1}{x+1} - \frac{3}{x-2} \geqslant 0$$

$$\frac{x-2-3(x+1)}{(x+1)(x-2)} \geqslant 0$$

$$\frac{-2x-5}{(x+1)(x-2)} \geqslant 0$$

$$\frac{x+5/2}{(x+1)(x-2)} \leq 0$$

x		$-5/2$		-1		2	
$x+1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x+5/2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$\frac{x+5/2}{(x+1)(x-2)}$	$-$		$+$		$-$		$+$

$$Ç = \left(-\infty, -\tfrac{5}{2}\right] \cup (-1, 2)$$

(b) Her $a, b \in \mathbb{R}$ için $|a|-|b| \leq |a-b|$ olduğunu gösteriniz.

$$|a| = |a-b+b| = |(a-b)+b| \leq |a-b| + |b| \Rightarrow$$

$$|a| - |b| \leq |a-b|$$

bulunur.

4) Aşağıdaki dizilerin limitlerini bulunuz.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{n^2-1}{n^2}\right]^n = ?$

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{n^2-1}{n^2}\right]^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$= e^{-1} \cdot e^{1} = e^{0} = 1$$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\ln n - \ln(n+5)\right] = ?$

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot [\ln n - \ln(n+5)] = \lim_{n\to\infty} n \cdot \ln\left(\frac{n}{n+5}\right) = \lim_{n\to\infty} \left[\ln\left(\frac{n}{n+5}\right)^n\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \ln\left[\frac{1}{\left(\frac{n+5}{n}\right)^n}\right] = \lim_{n\to\infty} \left[\ln 1 - \ln\left(\frac{n+5}{n}\right)^n\right]$$

$$= -\ln \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{5}{n}\right)^n = -\ln e^5 = -5\ln e$$

$$= -5$$

5) **(a)** $f(x)=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{\arcsin(2-x)}$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

$D(\sqrt{4-x^2}) = \{x\in\mathbb{R} : 4-x^2 \geq 0\} = [-2,2]$

$D(\arcsin(2-x)) = \{x\in\mathbb{R} : -1 \leq 2-x \leq 1\} = [1,3] \quad \Rightarrow$

$D(f) = [-2,2] \cap ([1,3] \setminus \{2\}) = [1,2)$

(b) $\lim\limits_{x\to -2} 3x+1=-5$ olduğunu $(\varepsilon-\delta)$ yöntemiyle gösteriniz.

$\forall \varepsilon>0$ için $0<|x+2|<\delta$ olduğunda $|(3x+1)-(-5)|<\varepsilon$

o.ş. $\exists \delta : \delta(\varepsilon)>0$?

$0<|x+2|<\delta$ olsun. $|(3x+1)-(-5)| = |3x+6| = 3|x+2|$

olup $\delta=\dfrac{\varepsilon}{3}$ alınmalıdır.

6) Aşağıdaki limitlerini bulunuz.

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)\right]=?$ $= \lim\limits_{x\to\infty}\left[x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)\dfrac{\left(1+\cos\frac{1}{x}\right)}{1+\cos\frac{1}{x}}\right] = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2\cdot\left(1-\cos^2\frac{1}{x}\right)}{1+\cos\frac{1}{x}}\right]$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right)^2 \cdot \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{1+\cos\frac{1}{x}}\right) = 1^2\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

(b) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+11}-2\sqrt{x-1}}{x^2-25}=?$ $\quad \lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+11}-2\sqrt{x-1}}{x^2-25} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$ olup eşlenik ile

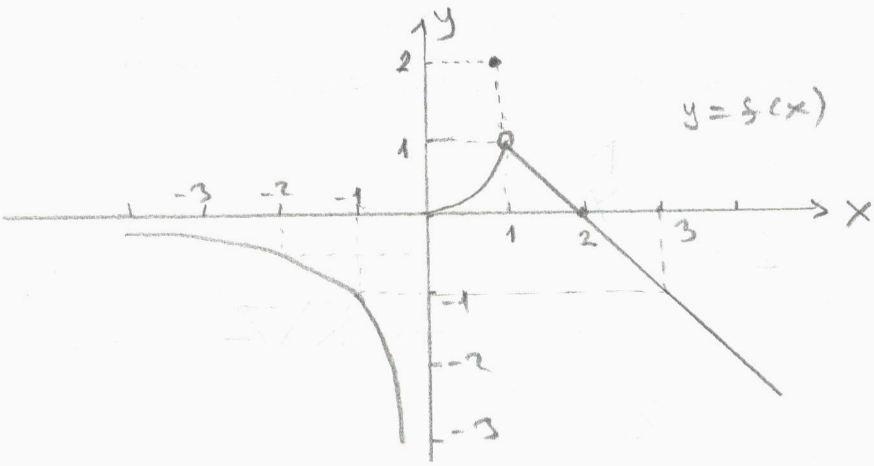
çarparsak

$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{(\sqrt{x+11}-2\sqrt{x-1})(\sqrt{x+11}+2\sqrt{x-1})}{(x^2-25)(\sqrt{x+11}+2\sqrt{x-1})} = \lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3(5-x)}{(x-5)(x+5)(\sqrt{x+11}+2\sqrt{x-1})}$

$= \dfrac{-3}{10(4+4)} = \dfrac{-3}{80}$ olur.

7) $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}, & x<0 \\ x^2, & 0\le x<1 \\ 2 & x=1 \\ 2-x, & x>1 \end{cases}$ fonksiyonu veriliyor. Buna göre

(a) f fonksiyonunun grafiğini çiziniz.



(b) $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=?$ $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\frac{1}{x}=\frac{1}{-1}=-1$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=?$ $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+} x^2=0^2=0$

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=?$ $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to1} f(x)=?$ $\lim\limits_{x\to1^+}(2-x)=\lim\limits_{x\to1^+}(2-1)=1,\ \lim\limits_{x\to1^-} x^2=1^2=1 \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to1} f(x)=1}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=?$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=?$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2-x)=-\infty$